13/05/19

πχ: Σχεδιάστε πλήρως την καμπύλη η οποία περιγράφεται από την εξίσωση $5x^2-6xy+5y^2=8$

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix} \qquad 5x^2-6xy+5y^2=(x,y)\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Διαγωνοποιώ τον συμμετρικό πίνακα A:

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}5-\lambda & -3\\ -3 & 5-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)^2-(3)^2=(5-\lambda-3)(5-\lambda+3)=$$

$$=(2-\lambda)(8-\lambda) \quad \text{Άρα } \lambda_1=8,\ \lambda_2=2$$

$$(x,y)\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=8(x')^2+2(y')^2$$

- $V(8)$: $\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow x=-y$

  $V(8)=\langle(1,-1)\rangle=\langle(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle$

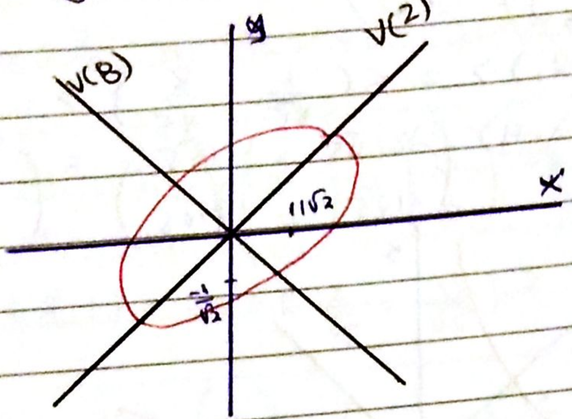
- $V(2)$: $\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow x=y$

$V(2) = <(1,1)> = <(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2})>$

$$(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \end{pmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt2} - \frac{y}{\sqrt2}, \frac{x}{\sqrt2} + \frac{y}{\sqrt2}\right)$$

Άρα η καμπύλη μετασχηματίζεται σε: (έλλειψη)

$$8(x')^2 + 2(y')^2 = 8 \Rightarrow (x')^2 + \frac{(y')^2}{4} = 1$$



— o —

Η εξίσωση $ax^2 + bxy + cy^2 = f$ με κατάλληλη αλλαγή βάσης μετασχηματίζεται στην απλούστερη $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = f'$. Η καμπύλη εξαρτάται από τα πρόσημα των λ_1, λ_2 & f':

1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:
   α. $f' = 0$: ευθεία
   β. $\lambda_2 f' < 0$: $\emptyset$
   γ. $\lambda_2 f' > 0$: 2 ευθείες

2) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $f' = 0$: σημείο το $(0,0)$
3) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $f' > 0$: έλλειψη
4) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $f' > 0$: υπερβολή
5) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $f' < 0$: $\emptyset$
6) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $f' = 0$: 2 ευθείες

πχ: 1) Σχεδιάστε την καμπύλη η οποία περιγράφεται από την εξίσωση: $7x^2 - 12xy - 2y^2 = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & -6 \\ -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda) - (-6)^2 =$$

$$= -14 - 5\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 5\lambda - 50 \Rightarrow \lambda_1 = 10, \lambda_2 = -5$$ υπερβολή

http://www.tanenghong.com

$7x^2 - 12xy - 2y^2 = 10(x')^2 - 5(y')^2$

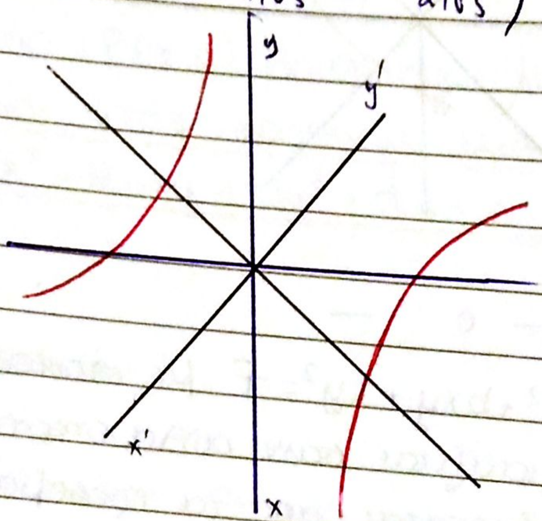
$\begin{pmatrix}-3 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow x = -2y$

$V(10) = \langle(-2,1)\rangle = \langle(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5})\rangle$ (αυτός είναι ο x')

$\begin{pmatrix}12 & -6\\ -6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow y = 2x$

$V(-5) = \langle(1,2)\rangle = \langle(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5})\rangle$ (-ıı- ο y')

$(x',y') = (x,y)\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & 1/\sqrt5\\ 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix} = \left(\frac{-2x}{\sqrt5} + \frac{y}{\sqrt5}, \frac{x}{\sqrt5} + \frac{2y}{\sqrt5}\right)$



$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = f$

$(x,y)\,A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (x',y')\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ $= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$

$(x',y') = (x,y)P \Rightarrow (x,y) = (x',y')P^{-1} = (x',y')P^t$

Το x σαν σχέση του x' κ' y'. Το ίδιο για το y.

Αντικαθιστώ στην αρχική κ' γίνεται: $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' = f'$

Θα κάνω το $\lambda_1(x')^2 + d'x'$ τέλειο τετράγωνο.

$\lambda_1(x')^2 + d'x' = \lambda_1(x'+k)^2 + \lambda$

Το ίδιο κ' για το $\lambda_2(y')^2 + e'y'$ θα γίνει: $\lambda_2(y'+\mu)^2 + \nu$

Η αρχική λαμβάνει μορφή: $\lambda_1(x'+k)^2 + \lambda_2(y'+\mu)^2 = f''$

Θα ορίσω νέους άξονες $X = x'+k$ κ' $Y = y'+\mu$ οπότε

η εξίσωση γίνεται: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = f''$

http://www.tanenot

2) Σχεδιάστε την καμπύλη η οποία περιγράφεται από την εξίσωση: $2x^2+4xy-y^2+4x-2y=-5$

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&-1\end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&2\\2&-1-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)(-1-\lambda)-2^2=-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-\lambda-6$$

Άρα $\lambda_1=3$ κ' $\lambda_2=-2$ (υπερβολή)

$$V(3):\ \begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=2y$$

(άξονας x')

$$V(3)=\langle(2,1)\rangle=\langle\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right)\rangle$$

$$V(-2):\ \begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=-2x$$

(άξονας y')

$$V(-2)=\langle(1,-2)\rangle=\langle\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{-2}{\sqrt5}\right)\rangle$$

$$(x',y')=(x,y)\begin{pmatrix}2/\sqrt5&1/\sqrt5\\1/\sqrt5&-2/\sqrt5\end{pmatrix}$$

$$(x,y)=(x',y')\begin{pmatrix}2/\sqrt5&1/\sqrt5\\1/\sqrt5&-2/\sqrt5\end{pmatrix}=\left(\frac{2x'}{\sqrt5}+\frac{y'}{\sqrt5},\ \frac{x'}{\sqrt5}-\frac{2y'}{\sqrt5}\right)$$

$$x=\frac{2x'+y'}{\sqrt5} \quad \text{κ'} \quad y=\frac{x'-2y'}{\sqrt5}$$

Αντικαθιστώ στην αρχική:

$$3(x')^2-2(y')^2+4\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt5}\right)-2\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt5}\right)=-5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x')^2-2(y')^2+\frac{8x'-2x'}{\sqrt5}+\frac{4y'+4y'}{\sqrt5}=-5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x')^2-2(y')^2-\frac{6x'}{\sqrt5}+\frac{8y'}{\sqrt5}=-5 \quad (1)$$

- $3(x')^2+\frac{6x'}{\sqrt5}=3\left((x')^2+\frac{2x}{\sqrt5}+\frac15-\frac15\right)=3\left(x'+\frac{1}{\sqrt5}\right)^2-\frac35$
- $-2(y')^2+\frac{8}{\sqrt5}y'=-2\left((y')^2-2y'\frac{2}{\sqrt5}+\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\right)=-2\left(y'-\frac{2}{\sqrt5}\right)^2+\frac85$

http://www.tanenghong.com

Ξαναντικαθιστώ στην (1)

$$3\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{3}{5} - 2\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{8}{5} = -5$$

$$3\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = -6$$

Ορίζω $X = x' + \frac{1}{\sqrt{5}}$ κ' $Y = y' - \frac{2}{\sqrt{5}}$

κ' η εξίσωση γίνεται: $3X^2 - 2Y^2 = -6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} - \dfrac{X^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ υπερβολή